Ecuación polinomial de grado superior

Forma general

$$\boxed{P_{(x)} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0}$$

donde $a_0 \neq 0$ y $n \geq 3$.

Ejemplos

- $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$
- $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 16x + 4 = 0$
- $x^5 - x^3 - 8x^2 + 8 = 0$
- $x^6 - 4x^4 - x^2 + 4 = 0$

Para resolver estas ecuaciones generalmente se utiliza las técnicas de factorización sobre $\mathbb{C}$; aunque a veces no es muy sencillo.

Ejemplo 1.

Resuelva la ecuación polinomial $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$.

Solución

Factorizamos la ecuación y obtenemos

$$\underbrace{x^3 - x^2}\ \underbrace{-2x + 2} = 0$$

$$\rightarrow\ x^2(x-1) - 2(x-1) = 0$$

$$\rightarrow\ (x-1)(x^2-2) = 0$$

$$\rightarrow\ (x-1)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right) = 0$$

$\rightarrow\ x = 1 \ \vee\ x = \sqrt{2}\ \vee\ x = -\sqrt{2}$ son las soluciones de la ecuación

$$\therefore\ CS = \left\{1;\ \sqrt{2};\ -\sqrt{2}\right\}$$

Ejemplo 2.

Resuelva la ecuación polinomial $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 16x + 4 = 0$.

Solución

Factorizamos la ecuación por el método de aspa doble especial.

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 16x + 4 = 0$$

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & & -4x & & 1 \\ x^2 & & 0x & & 4 \end{array}$$

$$\rightarrow \quad (x^2 - 4x + 1)(x^2 + 4) = 0$$

$$\rightarrow \quad \underbrace{(x^2 - 4x + 1)}_{\text{Aplicamos la fórmula general}}(x + 2i)(x - 2i) = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{12}}{2}, \quad x_3 = -2i, \quad x_4 = 2i$$

$$\therefore \quad \text{CS} = \{2 - \sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3},\ -2i,\ 2i\}$$

Teorema fundamental del álgebra

Toda ecuación polinomial de grado n, con coeficientes complejos, posee al menos una raíz compleja.

Por ejemplo, la ecuación $x^7 - x^5 + x^4 + 2x - 1 = 0$ posee al menos una raíz.

Gauss en su disertación doctoral (1799) dio la primera demostración rigurosa del *Teorema Fundamental del Álgebra*.

D'Alembert había tratado de dar una demostración en 1746.

Gauss dio dos demostraciones más. En la tercera prueba (1816) uso integrales complejas y mostro la gran maestría de Gauss en la teoría de los números complejos.

Corolario

Toda ecuación polinomial de grado n con coeficientes complejos, tiene exactamente n raíces contadas cada una de ellas según lo indique su multiplicidad.

Ejemplos

- $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$ Tiene exactamente 3 raíces.
- $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 16x + 4 = 0$ Tiene exactamente 4 raíces.
- $x^5 - x^3 - 8x^2 + 8 = 0$ Tiene exactamente 5 raíces.
- $x^{12} + 1 = 0$ Tiene exactamente 12 raíces.

Observación.

Si la ecuación polinomial $P_{(x)} = 0$ tiene raíces $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$; entonces, la ecuación se puede expresar como:

$$\boxed{P_{(x)} = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n) = 0}$$

La ecuación de tercer grado: fórmula de Cardano-Tartaglia

El matemático italiano Scipione del Ferro (1465-1526) resolvió la ecuación general de grado 3, pero sus descubrimientos no fueron publicados. Otro matemático italiano, Tartaglia (1499-1557), encontró un método para resolver cualquier ecuación cúbica de la forma

$$x^3 + px + q = 0$$

y sus resultados fueron publicados por Cardano (1501-1576) en su obra *Ars Magna*.

La fórmula se deduce de la siguiente manera. En primer lugar la ecuación cubica

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

se puede llevar a una de la forma

$$y^3 + py + q = 0$$

mediante la sustitución $y = x + \frac{a_1}{3}$

La sustitución anterior se llama *de Tchirnhausen*.

Ehrenfried Walther von Tschirnhaus (o Tschirnhausen) (1651-1708) fue un matemático, físico, médico y filósofo alemán.

Es bien conocida la *transformación de Tschirnhaus*, mediante la cual eliminaba ciertos términos intermedios de una ecuación algebraica dada; fue publicada en su *Acta Eruditorum* en 1683.

Por ejemplo, para la ecuación $x^3 - 3x^2 + 9x - 5 = 0$

Hacemos el cambio de variable: $y = x + \frac{-3}{3} = x - 1$ de donde, $x = y + 1$

Al reemplazar obtenemos: $y^3 + 6y + 2 = 0$.

Es decir; vamos a resolver la ecuación

$$x^3 + px + q = 0$$

Sea $x = u + v$ y reemplacemos en la ecuación

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

Esto es,

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

Supongamos que las incógnitas u y v satisfacen además la ecuación $3uv + p = 0$.

Nuestro problema se reduce a encontrar u y v tales que

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$

Como se conoce $u^3 + v^3$ y $u^3 v^3$, sabemos que u^3 y v^3 son las raíces de la ecuación cuadrática

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$$

Resolviendo la ecuación se obtiene

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \qquad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

y así llegamos a la fórmula de Cardano:

$$\boxed{x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}$$

Denotemos

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

es el *discriminante* de la ecuación cubica $x^3 + px + q = 0$.

Sean

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} \ \text{ y } \ B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

Luego, las tres raíces de la ecuación $x^3 + px + q = 0$ están dadas por

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= A + B \\ x_2 &= Aw + Bw^2 \\ x_3 &= Aw^2 + Bw \end{aligned}}$$

donde $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Propiedades

Dada la ecuación $x^3 + px + q = 0$ donde p y q son números reales.

i. Si $\Delta < 0$, entonces, las tres raíces son reales y diferentes.

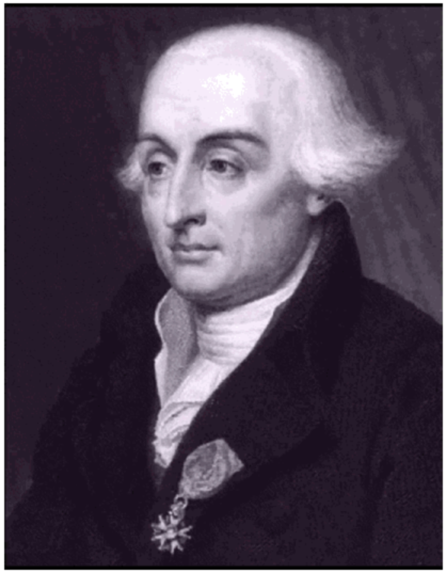
ii. Si $\Delta = 0$, entonces, las tres raíces son reales y dos de ellas iguales.

iii. Si $\Delta > 0$, entonces, una raíz es real y las otras dos son imaginarias.

La ecuación de cuarto grado

La ecuación de grado 4 fue resuelta por Ludovico Ferrari (1522-1565).

Fue un estudioso de las matemáticas que se dedicaba principalmente al estudio del álgebra, con lo que le llegó al descubrimiento de la resolución algebraica de la ecuación general de cuarto grado.



Lagrange encontró un método distinto para resolver las ecuaciones de grado 2, 3 y 4, que no dependía de un cambio de variables con ciertas condiciones, sino que era el final de una sucesión de razonamientos ordenados y profundos que utilizaban la teoría de los polinomios simétricos, la teoría de las permutaciones de las raíces y la teoría de las resolventes.

Teorema de Cardano - Viette

Relaciona los coeficientes de una ecuación polinomial con sus raíces.

1. **Para una ecuación cuadrática.**

$ax^2 + bx + c = 0$ de raíces x_1 y x_2.

Suma de raíces

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

Producto de raíces

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

2. Para una ecuación cúbica.

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ de raíces x_1; x_2 y x_3

Suma de raíces

$$\boxed{S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}}$$

Suma de productos binarios

$$\boxed{S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}}$$

Producto de raíces

$$\boxed{S_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}}$$

Ejemplo

1. Dada la ecuación $2x^3 - 5x^2 + 3x - 7 = 0$.

Entonces,

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2}$$

$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{3}{2}$$

$$S_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{-7}{2} = \frac{7}{2}$$

3. Para una ecuación cuártica.

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ de raíces x_1; x_2; x_3 y x_4.

Suma de raíces

$$\boxed{S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}}$$

Suma de productos binarios

$$\boxed{S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a}}$$

Suma de productos ternarios

$$\boxed{S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 = -\frac{d}{a}}$$

Producto de raíces

$$\boxed{S_4 = x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a}}$$

Ejemplo

1. Si la ecuación $x^4 - 12x - 5 = 0$ tiene dos raíces que suman dos, calcule la suma de las inversas de las otras dos raíces.

Solución

Sean las raíces x_1; x_2; x_3 y x_4. Por dato, $x_1 + x_2 = 2$.

Se pide calcular $\frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.

Por Cardano

$$S_1 = \underbrace{x_1 + x_2}_{2} + x_3 + x_4 = 0 \;\rightarrow\; x_3 + x_4 = -2$$

$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0$$

$$\rightarrow\; x_1x_2 + x_3\underbrace{(x_1 + x_2)}_{2} + x_4\underbrace{(x_1 + x_2)}_{2} + x_3x_4 = 0$$

$$\rightarrow \quad x_1x_2 + x_3x_4 + 2\underbrace{(x_3 + x_4)}_{-2} = 0$$

$$\rightarrow \quad x_1x_2 + x_3x_4 = 4$$

$$S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 = 12$$

$$\rightarrow \quad x_1x_2\underbrace{(x_3 + x_4)}_{-2} + x_3x_4\underbrace{(x_1 + x_2)}_{2} = 12$$

$$\rightarrow \quad -2x_1x_2 + 2x_3x_4 = 12$$

$$\rightarrow \quad -x_1x_2 + x_3x_4 = 6$$

Sumando

$$2x_3x_4 = 10 \quad \rightarrow \quad x_3x_4 = 5$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{x_3 + x_4}{x_3x_4} = \frac{-2}{5}$$

4. Para una ecuación polinomial de grado n.

Dada la ecuación polinomial de grano n

$$P_{(x)} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

de raíces x_1; x_2; x_3; …; x_n.

Suma de raíces

$$\boxed{S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}}$$

Suma de productos binarios

$$\boxed{S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0}}$$

Suma de productos ternarios

$$S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_3}{a_0}$$

Producto de raíces

$$S_n = x_1x_2x_3 \ldots x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_n}{a_0}$$

Teorema de paridad de raíces

Teorema 1.

En toda ecuación polinomial de coeficientes reales y grado $n \geq 2$, si una raíz es $x_1 = a + bi,\ \ b \neq 0$, entonces otra raíz es $x_2 = a - bi$.

Teorema 2.

En toda ecuación polinomial de coeficientes racionales y grado $n \geq 2$, si una raíz es $x_1 = a + \sqrt{b}$, entonces otra raíz es $x_2 = a - \sqrt{b}$.

(Se considera $a \in \mathbb{Q}$ y $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}'$)

Teorema 3.

En toda ecuación polinomial de coeficientes racionales y grado $n \geq 4$, si una raíz es $x_1 = \sqrt{a} + \sqrt{b}$; con $\{\sqrt{a},\ \sqrt{b}\} \subset \mathbb{Q}'$ y $\sqrt{a}\sqrt{b} \in \mathbb{Q}'$, entonces, $x_2 = \sqrt{a} - \sqrt{b}$; $x_3 = -\sqrt{a} + \sqrt{b}$ y $x_4 = -\sqrt{a} - \sqrt{b}$ tambien son raices.